

Differentiaalrekening

Elementaire techniek van het differentieren.

Saxion Hogescholen
Oktober 2008

Differentiaalrekening

Een van de belangrijkste technieken in de wiskunde is differentiaalrekening. Deze technieken is in de 17e eeuw ontwikkeld door Newton en Leibniz (onafhankelijk van elkaar).

De toepassing van deze techniek is vooral in de natuurkunde van groot belang geweest. Maar ook moderne economische modellen zijn ondenkbaar zonder gebruik te maken van deze wiskunde.

Differentiaalrekening heeft betrekking op veranderingen. Eerst kijken we daarom naar het zogenaamde differentiequotiënt.

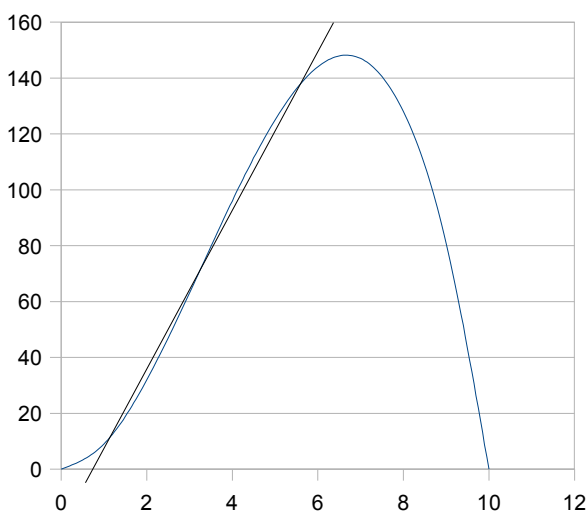
1 Differentiequotiënt

Op bergwegen zie je regelmatig dit soort verkeersborden.



De 10% geeft iets aan over de helling van de weg. Het percentage wordt als volgt berekend: het hoogteverschil tussen twee punten langs de weg wordt gedeeld door de afgelegde afstand over de weg tussen die twee punten.

In de wiskunde worden verschillen op een iets andere manier berekend. Hieronder zie je de grafiek van $y = -x^3 + 10x^2$



Om de helling in een grafiek te bepalen spreken geldt de volgende afspraak:

Vanuit een punt van de grafiek bijv. (1, 9) trekken we een lijn naar een tweede punt, bijv. (3, 63).

De gemiddelde helling wordt nu gedefinieerd als:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{63 - 9}{3 - 1} = \frac{54}{2} = 27$$

Deze uitkomst noemen we ook wel de richtingscoëfficiënt (rc).

Hierbij staat Δx voor de verandering in de x-richting (horizontaal), Δy voor de verandering in de y-richting (verticaal).

Bereken nu zelf de gemiddelde helling tussen de punten op de grafiek bij $x = 8$ en $x = 10$.

Een volgende stap is het idee om de twee punten dicht bij elkaar te kiezen, bijvoorbeeld de punten (1, 9) en (2, 32). Het bijbehorende differentiaalquotiënt is dan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{32 - 9}{2 - 1} = \frac{21}{1} = 21, \text{ de gemiddelde helling is hier dus minder steil.}$$

Nog één voorbeeld:

de punten (1, 9) en (1.1, 10.77) geven als rc
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10,77 - 9}{1,1 - 1} = \frac{1,77}{0,1} = 17,7$$

Hiermee kun je doorgaan tot de beide punten bijna samenvallen. We spreken dan over de

richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt (1, 9). Dit noemen we ook wel de afgeleide in het punt (1, 9).

2 Differentiëren

Differentiëren gaat over het berekenen van de afgeleide in een willekeurig punt van een grafiek.

De grafiek uit het voorbeeld hoort bij de functie $f : x \rightarrow -x^3 + 10x^2$

Differentiëren bestaat nu uit het toepassen van een aantal regels waarmee uit het functievoorschrift voor elke waarde van x de afgeleide kan worden berekend. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de afgeleide functie.

Bij de functie $f(x)$ wordt de afgeleide functie genoteerd als $f'(x)$ (spreek uit: f-accnt).

Voor het bepalen van de afgeleid functie bestaan een aantal eenvoudige regels.

Differentieerregels			
1:	$f : x \rightarrow c$	afgeleide	$f' : x \rightarrow 0$
2:	$f : x \rightarrow ax$	afgeleide	$f' : x \rightarrow a$
3:	$f : x \rightarrow a \cdot x^n$	afgeleide	$f' : x \rightarrow a \cdot n \cdot x^{n-1}$
Rekenregels:			
1:	$f(x) = g(x) + h(x)$	afgeleide	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$
2:	$f(x) = a \cdot g(x)$	afgeleide	$f'(x) = a \cdot g'(x)$

Voorbeelden

1:	$f : x \rightarrow 5$	afgeleide	$f' : x \rightarrow 0$	(regel 1)
2:	$f : x \rightarrow 4x$	afgeleide	$f' : x \rightarrow 4$	(regel 2)
3:	$f : x \rightarrow x^3$	afgeleide	$f' : x \rightarrow 3x^2$	(regel 3)
4:	$f : x \rightarrow 3x^2 + 4x$	afgeleide	$f' : x \rightarrow 3 \cdot 2 \cdot x^1 = 6x$	(Rr 1)
5:	$f : x \rightarrow 4(x^2 + 5x)$	afgeleide	$f' : x \rightarrow 4(2x + 5)$	(Rr 2)

Opgaven

Bepaal de afgeleide functie:

- | | | | |
|----|--|----|--|
| a. | $f : x \rightarrow 6x^2 - 7$ | e. | $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ |
| b. | $f : x \rightarrow 4x^2 + x + 5$ | f. | $f : x \rightarrow \frac{3}{x^3}$ |
| c. | $f : x \rightarrow 7x^4 - 6x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ | g. | $f : x \rightarrow \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$ |
| d. | $f : x \rightarrow \sqrt{x}$ | | |

Een andere manier om de afgeleide te noteren is de volgende schrijfwijze, naar analogie van het differentiequotiënt.

Vb. $y = x^2 + 5$ afgeleide: $y' = \frac{dy}{dx} = 2x$

Met behulp van de afgeleide functie kunnen richtingscoëfficiënten van raaklijnen worden bepaald.

In het voorbeeld wordt dit duidelijk.

Gegeven is de functie $y = -x^3 + 10x^2$

Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van y in het punt $(1, 9)$.

Oplossing.

1. Bepaal eerst de afgeleide functie: $y' = -3x^2 + 20$
2. Vul nu in $x = 1$: $y'(1) = -3 \cdot 1^2 + 20 = 17$ Dit is de richtingscoëfficiënt (rc) van de raaklijn.
3. De raaklijn heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$. Hierin is a de rc.
Dus $y = 17x + b$
4. We maken nu gebruik van het raakpunt $(1, 9)$, dit ligt uiteraard op de raaklijn.
Dus: $9 = 17 \cdot 1 + b \implies b = 9 - 17 = -8$.

De vergelijking van de raaklijn is dus: $y = 17x - 8$

Opgaven

Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het opgegeven punt bij de volgende functies:

- a. $f: x \rightarrow 2x + 5$ in het punt $(1, 7)$
- b. $y = 2x^3 - 5x$ in het punt $(1, -3)$
- c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in het punt $(1, 1)$
- d. $y = \sqrt{x^3}$ in het punt $(1, 1)$

Een van de belangrijkste toepassingen van differentiaalrekening is het opsporen van maxima en minima van functies. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de eigenschap dat de raaklijn aan een grafiek horizontaal loopt bij een maximum of minimum.

Voorbeeld

De functie $f(x) = -x^3 + 10x^2$ heeft een maximum en een minimum (zie grafiek op pag. 1)

De afgeleide functie is $f'(x) = -3x^2 + 20x$

Nulpunten van de afgeleide zijn te vinden door de volgende vergelijking op te lossen:

$$\begin{aligned} -3x^2 + 20x &= 0 & \Leftrightarrow & x(-3x + 20) = 0 \\ & & \Leftrightarrow & x = 0 \vee -3x + 20 = 0 \\ & & \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = 20/3 \end{aligned}$$

Bij $x = 0$ heeft de grafiek een minimum, bij $x = 6\frac{2}{3}$ heeft de grafiek een maximum.

3 Standaardafgeleiden

De voorbeelden uit het voorgaande hebben alle betrekking op functies die te schrijven zijn als machten van x . Voor een aantal functies dit niet. Hieronder staan een aantal zogenaamde standaardafgeleiden, die voor dit soort situaties gebruikt kunnen worden.

1. Logaritmische functies

$$f(x) = \ln x \quad \text{afgeleide: } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^g \log x \quad \text{afgeleide: } f'(x) = \frac{1}{\ln g} \cdot \frac{1}{x}$$

2. Exponentiele functies:

$$f(x) = e^x \quad \text{afgeleide: } f'(x) = e^x$$

$$f(x) = g^x \quad \text{afgeleide: } f'(x) = \ln g \cdot e^{x \ln g}$$

4 Rekenregels voor differentieren.

Voor een aantal situaties zijn de gegeven regels niet toereikend, hieronder volgen enkele voorbeelden.

$$y = 3x^3 \cdot \sqrt{2x} \quad \text{Dit is niet eenvoudig te schrijven als som van machten van } x$$

$$y = \sqrt{x^3 + 2x} \quad \text{Dit kan niet als som van machten van } x \text{ geschreven worden}$$

$$y = \frac{2x}{x^2 + 4} \quad \text{En dit ook niet.}$$

De afgeleide functie is in dit soort gevallen te vinden door de volgende regels toe te passen:

1. De productregel: $f(x)$ is te schrijven als $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

de afgeleide wordt dan $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

2. De quotiëntregel: $f(x)$ is te schrijven als $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

de afgeleide wordt dan $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$

3. De kettingregel: $f(x)$ is te schrijven als $f(x) = g(h(x))$

de afgeleide wordt dan $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Toepassing op de voorbeelden

$$y = 3x^3 \cdot \sqrt{2x} \Rightarrow y' = 3 \cdot 3x^2 \cdot \sqrt{2x} + 3x^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} \quad (\text{productregel})$$

$$y = \sqrt{x^3 + 2x} = (x^3 + 2x)^{1/2} \Rightarrow y' = 1/2 (x^3 + 2x)^{-1/2} \cdot (3x^2 + 2) = \frac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x}} \quad (\text{kettingregel})$$

$$y = \frac{2x}{x^2 + 4} \Rightarrow y' = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} \quad (\text{quotiëntregel})$$

Opgaven

Differentieer de volgende functies:

a. $f(x) = 3 - 2x + 5\sqrt{x}$

f. $g(x) = 3 \ln(x^2 + 2x)$

b. $f(x) = x^3 - 3 \ln x$

g. $h(x) = \frac{3x + 2}{x^2 - 2x}$

c. $f(x) = (x^2 - 1)(2x^2 + 5x)$

h. $f(x) = \frac{3x\sqrt{x}}{x^2 - 1}$

d. $g(x) = 3\sqrt{x}(3x^2)$

e. $f(x) = (2x^2 + 1)^4$

Onderzoek de volgende functies op maxima en minima

a. $f(x) = x^3 - 3x$

b. $g(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$