

Differentiaalrekening: antwoorden bij de opgaven

Opgave I

- a. $f: x \rightarrow 6x^2 - 7$ afgeleide $f': x \rightarrow 2 \cdot 6x^1 = 12x$
- b. $f: x \rightarrow 4x^2 + x + 5$ afgeleide $f': x \rightarrow 2 \cdot 4x^1 + 1 = 8x + 1$
- c. $f: x \rightarrow 7x^4 - 6x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ afgeleide $f': x \rightarrow 28x^3 - 12x + \frac{1}{2}$
- d. $f: x \rightarrow \sqrt{x} = x^{1/2}$ afgeleide $f': x \rightarrow \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- e. $f: x \rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$ afgeleide $f': x \rightarrow -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- f. $f: x \rightarrow \frac{3}{x^3} = 3x^{-3}$ afgeleide $f': x \rightarrow -3 \cdot 3x^{-4} = -\frac{9}{x^4}$
- g. $f: x \rightarrow \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} = x^{-3} - \frac{1}{2} \cdot x^{-1/3}$
afgeleide $f': x \rightarrow -3x^{-4} - (-1/3) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-4/3} = -\frac{3}{x^4} + \frac{1}{6x\sqrt[3]{x}}$ (moeilijke som)

Opgave II

- a. $f: x \rightarrow 2x + 5$, vgl van raaklijn in het punt (1, 7)
1. $f'(x) = 2$ dus r.c. is 2
 2. vgl van de vorm $y = ax + b$ (altijd bij raaklijnen) en $a = 2$ (r.c. is immers 2)
 3. vul in (1, 7): $7 = 2 \cdot 1 + b \implies b = 7 - 2 = 5$
 4. vgl van de raaklijn: $y = 2x + 5$
- b. $y = 2x^3 - 5x$ in het punt (1, -3)
1. $y' = 6x^2 - 5$ dus r.c. is $6 \cdot 1 - 5 = 1$
 2. raaklijn heeft vgl $y = ax + b$ met $a = 1$
 3. vul in (1, -3): $-3 = 1 \cdot 1 + b \rightarrow b = -4$
 4. vgl van raaklijn: $y = x - 4$
- c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in het punt (1, 1)
1. $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ dus r.c. is $\frac{-2}{1^3} = -2$
 2. vgl: $y = ax + b$ met $a = -2$
 3. vul in (1, 1): $1 = -2 \cdot 1 + b \rightarrow b = 3$

4. vgl van raaklijn: $y = -2x + 3$

d. $y = \sqrt{x^3}$ in het punt (1, 1)

1. $y' = 3/2 \sqrt{x}$ dus r.c. is $3/2 \cdot \sqrt{1} = 3/2$

2. vgl: $y = ax + b$ met $a = 3/2$

3. vul in (1, 1): $1 = 3/2 \cdot 1 + b \rightarrow b = -1/2$

4. vgl van raaklijn: $y = 3/2 x - 1/2$

Opgave III

a. $f(x) = 3 - 2x + 5\sqrt{x}$ afgel. $f'(x) = -2 + \frac{5}{2\sqrt{x}}$

b. $f(x) = x^3 - 3 \ln x$ afgel. $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x}$

c. $f(x) = (x^2 - 1)(2x^2 + 5x)$ afgel. $f'(x) = 2x(2x^2 + 5x) + (x^2 - 1)(4x + 5)$

d. $g(x) = 3\sqrt{x}(3x^2)$ afgel. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \cdot 3x^2 + 3\sqrt{x} \cdot 6x = 22,5 x \sqrt{x}$

e. $f(x) = (2x^2 + 1)^4$ afgel. $f'(x) = 4(2x^2 + 1)^3 \cdot 4x$

f. $g(x) = 3 \ln(x^2 + 2x)$ afgel. $f'(x) = \frac{3}{(x^2 + 2x)} \cdot (2x + 2) = \frac{6x + 6}{(x^2 + 2x)^2}$

g. $h(x) = \frac{3x + 2}{x^2 - 2x}$ afgel. $h'(x) = \frac{3(x^2 - 2x) - (3x + 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} =$
 $= \frac{3x^2 - 6x - 6x^2 + 2x + 4}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2}$

Opgave IV

a. $f(x) = x^3 - 3x$

1. afgeleide functie: $f'(x) = 3x^2 - 3$

2. Los op: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = 1 \vee x = -1$$

3. $f(1) = -2$, $f(-1) = 2$

tekenschema van de afgeleide functie: $\begin{array}{ccccccc} + & 0 & - & 0 & + \\ & -1 & & 1 & \end{array}$

functie f stijgt als $x < -1$, daalt als x tussen -1 en 1 en stijgt als $x > 1$

b. $g(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$

1. afgeleide functie: $g'(x) = \frac{x^2+3-(x-1)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$

2. $g'(x) = 0$
 $\Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$
 $\Rightarrow (-x-1)(x-3) = 0$
 $\Rightarrow x = -1 \vee x = 3$

3. $g(-1) = -\frac{1}{2}$, $g(3) = \frac{1}{6}$

tekenschema: $\begin{array}{ccccccc} & - & 0 & + & 0 & - & \\ & & -1 & & 3 & & \end{array}$

4. functie daalt voor $x < -1$ en voor $x > 3$, daartussen stijgt de functie
 tenslotte een schets van de grafiek:

